На правах рукописи

Семенова Марина Михайловна

ДЕКОМПОЗИЦИЯ МОДЕЛЕЙ МНОГОТЕМПОВЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

05.13.18— математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Ярославль — 2006

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений и теории управления Самарского государственного университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Соболев Владимир Андреевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Кубышкин Евгений Павлович
	доктор физико-математических наук, профессор Чернышов Карнелий Иссидорович
Ведущая организация:	Самарский государственный аэрокосмический университет им. С. П. Королева

Защита состоится "____"__________ 2006 г. в _____ час. на заседании диссертационного совета К 212.002.04 при Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова по адресу: 150000, г. Ярославль, ул. Советская, 14.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Автореферат разослан "____"__________ 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Глызин С. Д.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Прикладное значение теории сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений достаточно велико, ее методы активно применяются для решения задач из различных разделов гидро- и электродинамики, динамики полета, радиотехники, экономики и других областей естествознания и техники. Основы этой теории и ее методов заложены в трудах А. Н. Тихонова, А. Б. Васильевой, Л. С. Понтрягина, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского, В. Р. Вазова, В. Ф. Бутузова, В. М. Волосова, С. А. Кащенко, А. И. Климушева, Н. Н. Красовского, К. И. Чернышова, А. И. Кобрина, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розова, И. В. Новожилова, В. А. Тупчиева, О. Б. Лыковой, K. W. Chang, J. H. Chow, A. Erdelyi, N. Fenichel, J. W. Macki, R. E. O'Malley, F. Hoppensteadt, H. K. Khalil, J. J. Levin, N. Levinson.

Проблемы управляемости, наблюдаемости, устойчивости и стабилизируемости систем, моделирующих поведение каких-либо объектов возникают при решении задач из различных областей инженерии, физики и экономики. Развитие методов, основанных на математическом моделировании реальных процессов, повлекло создание математической теории управления, основоположниками которой можно считать Л. С. Понтрягина, Н. Н. Красовского, В. И. Зубова, Р. Е. Калмана, П. Л. Фалба, Э. Б. Ли, Л. Маркуса, Х. К. Квакернаака, Р. Сивана, А. А. Воронова, Я. Н. Ройтенберга, Е. В. Воскресенского. Исследованию свойств устойчивости, управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости сингулярно возмущенных систем посвящены труды А. Б. Васильевой, М. Г. Дмитриева, Б. В. Викторова, А. А. Воронова, В. Г. Гайцгори, А. Л. Дончева, С. А. Кащенко, Е. П. Кубышкина, Г. А. Куриной, А. А. Первозванского, В. А. Плотникова, Е. С. Пятницкого, В. А. Соболева, К. И. Чернышова, E. H. Abed, M. D. Ardema, J. H. Chow, D. Cobb, W. B. Collins, A. H. Haddad, H. K. Khalil, P. V. Kokotovic, R. E. O'Malley, J. O'Reilly, B. Porter, P. Sannuti, M. Suzuki.

Настоящая работа посвящена исследованию таких свойств работоспособности сингулярно возмущенных управляемых систем как управляемость, наблюдаемость, устойчивость и стабилизируемость.

Цель работы:

— Понижение размерности задач управляемости и наблюдаемости управляемых многотемповых систем так, чтобы модель меньшей размерности с большой степенью точности отражала все свойства исходной системы.

— Получение достаточных условий управляемости и наблюдаемости сингулярно возмущенных систем.

— Получение достаточных условий устойчивости энергетической системы, состоящей из двух разнотипных электростанций.

— Получение достаточных условий локальной управляемости и локальной

наблюдаемости вблизи нуля однозвенного манипулятора с упругим сочленением.
— Получение достаточных условий стабилизируемости силового гироскопического стабилизатора.
— Получение достаточных условий управляемости технологического комплекса непрерывного действия.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:
— Проведена декомпозиция задач устойчивости, управляемости и наблюдаемости для моделей линейных многотемповых систем.
— Предложен алгоритм расщепления задач управляемости и наблюдаемости нелинейных многотемповых систем.
— Получены достаточные условия управляемости и наблюдаемости многотемповых систем.
— Изучен случай, когда наличие свойств управляемости и наблюдаемости системы определяется наличием этих свойств у системы k-ого приближения данной системы.
— Исследованы такие свойства как устойчивость, управляемость, наблюдаемость и стабилизируемость следующих динамических моделей: энергосистемы из двух разнотипных электростанций, однозвенного манипулятора с упругим сочленением, силового гироскопического стабилизатора, непрерывного технологического комплекса.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты диссертации имеют теоретическую и практическую направленность. Методы, полученные в данной работе, являются развитием методов математического моделирования применительно к теории управляемости сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений. Доказанные теоремы имеют прикладное значение и могут быть использованы при исследовании свойств устойчивости, управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости технических систем, уравнения движения которых заданы сингулярно возмущенными системами дифференциальных уравнений. Результаты исследования таких моделей, как энергосистема из двух электростанций, манипулятор с упругим сочленением, гиростабилизатор, технологический комплекс, имеют практическую ценность.

Методы исследования. При обосновании теоретических и практических результатов использовались: методы теории математического моделирования; теория асимптотических методов; метод декомпозиции, основанный на теории интегральных многообразий; метод пространства состояний; численные методы решений дифференциальных уравнений; асимптотические и геометрические методы анализа.

На защиту выносятся:

1. Алгоритмы понижения размерности задач управляемости и наблюдаемости сингулярно возмущенных систем.
2. Достаточные условия управляемости и наблюдаемости многотемповых систем.
3. Достаточные условия управляемости и наблюдаемости управляемых многотемповых систем в случае, когда наличие этих свойств определяется наличием таких свойств у системы k-ого приближения данной системы.
4. Достаточные условия устойчивости энергетической системы из двух разнотипных электростанций.
5. Достаточные условия локальной управляемости и локальной наблюдаемости в окрестности начала координат однозвенного манипулятора с упругим сочленением.
6. Достаточные условия стабилизируемости силового гироскопического стабилизатора.
7. Достаточные условия управляемости непрерывного технологического комплекса.

Апробация результатов работы осуществлялась на различных научных конференциях: Воронежский зимний симпозиум "Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках г. Воронеж (январь, 2000г.); VII Международная конференция "Математика. Компьютер. Образование г. Дубна (январь, 2000г.); Воронежская весенняя математическая школа "Современные методы в теории краевых задач. Понтрягинские чтения– XI г. Воронеж (май, 2000г.); Международный семинар "Нелинейное моделирование и управление г. Самара (июнь, 2000г.; июль, 2001г.; июнь, 2004г.; июнь, 2005г.); I, II Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике, г. Сочи (октябрь, 2000г.), г. Йошкар-Ола (декабрь, 2001г.); VII, VIII Международный семинар "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления г. Москва (май, 2002г., июнь, 2004г.); Всероссийская научная конференция "Математическое моделирование и краевые задачи г. Самара (май, 2004г.).

Публикации. Основные результаты работы отражены в 15 публикациях, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, 6 параграфов и 10 рисунков, заключения, изложенных на 94 страницах, списка литературы, включающего 132 наименования, и 3 приложений.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается обоснование актуальности темы диссертации, содержится краткий обзор работ по ее тематике, перечислены основные результаты, полученные в работе.

Глава 1 состоит из трех параграфов и содержит математический аппарат исследования двухтемповых систем. **В первом параграфе** в п. 1.1.1

рассматривается математическая модель линейной двухтемповой управляемой системы следующего вида

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1 u, \\
\varepsilon\dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2 u,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1},\ x_2 \in \mathbb{R}^{n_2},\ u \in \mathbb{R}^r$ — управляющие воздействия, $x_1,\ x_2$ — медленная и быстрая переменные, $A_{ij} = A_{ij}(t,\varepsilon),\ B_i = B_i(t,\varepsilon),\ i,j = 1,2$ — матричные функции; ε — малый положительный параметр, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $t \in \mathbb{R}$, точка обозначает дифференцирование по t.
Предполагается, что матрицы $A_{ij},\ A_{22}^{-1}(t,0),\ B_i$ непрерывны и ограничены вместе с достаточным количеством производных по t и ε при $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ и, следовательно, для матриц $A_{ij}(t,\varepsilon),\ B_i(t,\varepsilon)$ имеют место асимптотические разложения по малому параметру ε с гладкими и ограниченными коэффициентами. Предполагается также, что собственные значения $\lambda_i = \lambda_i(t),\ i = \overline{1,n_2}$ матрицы $A_{22}(t,0)$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant -\beta_1 < 0$.
Расщепляющее преобразование для данной модели имеет вид:

$$y_1 = x_1 - \varepsilon H y_2,\ y_2 = x_2 - L x_1.$$

В результате такого преобразования получим систему блочно-диагонального вида

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= A_1 y_1 + \bar{B}_1 u, \\
\varepsilon\dot{y}_2 &= A_2 y_2 + \bar{B}_2 u,\ A_i = A_i(t,\varepsilon),\ \bar{B}_i = \bar{B}_i(t,\varepsilon),\ i = 1,2,
\end{aligned}
$$

где $A_1 = A_{11} + A_{12}L,\ A_2 = A_{22} - \varepsilon L A_{12},\ \bar{B}_2 = B_2 - \varepsilon L B_1,\ \bar{B}_1 = B_1 - H\bar{B}_2$.
Первое уравнение в этой системе является медленным, а второе — быстрым. Функции $L = L(t,\varepsilon),\ H = H(t,\varepsilon)$ можно искать в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра.
В п. 1.1.2 сформулированы и доказаны следующие теоремы:
Теорема 1. Если медленная и быстрая подсистемы блочно-диагональной системы управляемы на отрезке времени $[t_0,t_1]$, то исходная система (1) управляема на этом отрезке.
Пусть матрицы–коэффициенты блочно-диагональной системы непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $t^* \in [t_0,t_1]$ соответственно до $(n_1-1),\ (n_2-1)$ порядков включительно. Пусть для медленной подсистемы определены матрицы $K_{i0},\ i = \overline{1,n_1}$ следующим образом: $K_{10} = \bar{B}_1^{(0)}$, $K_{20} = A_1^{(0)}\bar{B}_1^{(0)} - \frac{d\bar{B}_1^{(0)}}{dt},\ldots,K_{n_1,0} = A_1^{(0)}K_{n_1-1,0} - \frac{dK_{n_1-1,0}}{dt},\ A_1^{(0)} = A_{11}^{(0)} - A_{12}^{(0)}$ $\times(A_{22}^{(0)})^{-1}A_{21}^{(0)},\ \bar{B}_1^{(0)} = B_1^{(0)} - A_{12}^{(0)}(A_{22}^{(0)})^{-1}B_2^{(0)}$. Матрица K^0 задана формулой: $K^0 = (K_{10},K_{20},\ldots,K_{n_1,0})$.
Теорема 2. Если существует точка $t^* \in [t_0,t_1]$ в которой выполняются следующие условия: 1) $\operatorname{rank}\ (K^0) = n_1$;

2) rank $\left(B_2^{(0)}, A_{22}^{(0)}B_2^{(0)}, \ldots, (A_{22}^{(0)})^{n_2-1}B_2^{(0)}\right) = n_2$;
то существует такое $\varepsilon^* > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, $\varepsilon^* \leqslant \varepsilon_0$, система (1) управляема на отрезке $[t_0, t_1]$.

Определение 1. Системой k-ого приближения блочно-диагональной системы называется система вида

$$\dot{y_1} = A_{1(k)}(t,\varepsilon)y_1 + \bar{B}_{1(k)}(t,\varepsilon)u, \ \varepsilon\dot{y_2} = A_{2(k)}(t,\varepsilon)y_2 + \bar{B}_{2(k)}(t,\varepsilon)u, \qquad (2)$$

$$A_{i(k)}(t,\varepsilon) = \sum_{l=0}^{k} \varepsilon^l A_i^{(l)}(t), \ \bar{B}_{i(k)}(t,\varepsilon) = \sum_{l=0}^{k} \varepsilon^l \bar{B}_i^{(l)}(t), \ i = 1, 2.$$

Теорема 3. Пусть в некоторой фиксированной точке $t^* \in [t_0, t_1]$ существуют миноры n_i-ого порядка $M_{n_i}^{(k)} \neq 0$ матриц управляемости $\left(\bar{B}_{i(k)}, A_{i(k)}\bar{B}_{i(k)}, \ldots, A_{i(k)}^{n_i-1}\bar{B}_{i(k)}\right)$ медленной и быстрой подсистемы системы (2), представимые в виде $M_{n_i}^{(k)} = \varepsilon^k M_i^k + \varepsilon^{k+1}M_i(\varepsilon)$, где $M_i^k \neq 0$, $M_i^k \in \mathbb{R}$, $M_i(\varepsilon)$ — скалярная непрерывная функция, $i = 1, 2$. Тогда существует такое $\varepsilon^* > 0$, что система (1) управляема на отрезке $[t_0, t_1]$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, $\varepsilon^* \leqslant \varepsilon_0$.

Пусть $V_1(t, t_0)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{y_1} = A_1^{(0)}y_1$, $V_1(t_0, t_0) = I$; $V_2(t, t_0, \varepsilon)$ — фундаментальная матрица системы $\varepsilon\dot{y_2} = (A_2^{(0)} + \varepsilon A_2^{(1)})y_2$, $V_2(t_0, t_0, \varepsilon) = I$; матрица $A_1^{(0)}$ определена выше, $A_2^{(0)} = A_{22}^{(0)}$, $A_2^{(1)} = A_{22}^{(1)} + (A_{22}^{(0)})^{-1}A_{21}^{(0)}A_{12}^{(0)}$. Матрица $W(t_0, t_1)$ имеет вид

$$W(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} V_1(t_0,\tau) & 0 \\ 0 & V_2(t_0,\tau,\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \frac{1}{\varepsilon}\bar{B}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{B}_1{}' & \frac{1}{\varepsilon}\bar{B}_2{}' \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} V_1'(t_0,\tau) & 0 \\ 0 & V_2'(t_0,\tau,\varepsilon) \end{pmatrix} d\tau$$

$$= \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t_1} V_1(t_0,\tau)\bar{B}_1\bar{B}_1{}'V_1'(t_0,\tau)d\tau & \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t_1} V_1(t_0,\tau)\bar{B}_1\bar{B}_2{}'V_2'(t_0,\tau,\varepsilon)d\tau \\ \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t_1} V_2(t_0,\tau,\varepsilon)\bar{B}_2\bar{B}_1{}'V_1'(t_0,\tau)d\tau & \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{t_0}^{t_1} V_2(t_0,\tau,\varepsilon)\bar{B}_2\bar{B}_2{}'V_2'(t_0,\tau,\varepsilon)d\tau \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12}(\varepsilon) \\ \Phi_{21}(\varepsilon) & \frac{1}{\varepsilon}\Phi_{22}(\varepsilon) \end{pmatrix}, \ \Phi_{21}(\varepsilon) = \Phi_{12}'(\varepsilon).$$

Теорема 4. Если главные блоки Φ_{11}, $\Phi_{22}(0)$ матрицы W положительно определены, то существует такое $\varepsilon^* > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, $\varepsilon^* \leqslant \varepsilon_0$ система (1) является управляемой на отрезке $[t_0, t_1]$.

В п. 1.1.3 получены достаточные условия наблюдаемости линейной автономной двухтемповой системы.

Во втором параграфе исследуются нелинейные двухтемповые системы. В п. 1.2.1 рассматривается математическая модель нелинейной сингулярно возмущенной системы

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \ \varepsilon\dot{y} = g(x, y, \varepsilon). \qquad (3)$$

Здесь $x \in X \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in Y \subset \mathbb{R}^{n_2}$ — медленная и быстрая переменные, ε — малый положительный параметр, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $t \in \mathbb{R}$, $f(x, y, \varepsilon)$, $g(x, y, \varepsilon)$ — векторные функции.
Предполагается,что для этой системы выполняются условия:
1) Уравнение $g(x, y, 0) = 0$ имеет изолированное решение $y = h_0(x)$.
2) В области $\Omega = \{(x, y, \varepsilon) : \|y - h_0(x)\| \leqslant \rho, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]\}$ функции f, g, h_0 равномерно непрерывны и ограничены с достаточным числом частных производных по всем переменным.
3) Собственные значения $\lambda_j = \lambda_j(x), j = \overline{1, n_2}$ матрицы
$B = B(x) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, h_0(x))$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} \lambda_j \leqslant -2\beta < 0$.
В системе (3) производится замена переменных

$$\begin{aligned} x &= v + \varepsilon H(v, z, \varepsilon),\ H(v, 0, \varepsilon) \equiv 0, \\ y &= z + h(x, \varepsilon), \end{aligned} \tag{4}$$

в результате которой получена система блочно-треугольного вида

$$\begin{aligned} \dot{v} &= F(v, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{z} &= Z(v, \varepsilon H, z, \varepsilon),\ Z(v, \varepsilon H, 0, \varepsilon) \equiv 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $F(v, \varepsilon) = f(v, h(v, \varepsilon), \varepsilon)$, $Z(v, \varepsilon H, z, \varepsilon) = g(v + \varepsilon H, z + h(v + \varepsilon H, \varepsilon), \varepsilon)$ $-g(v + \varepsilon H, h(v + \varepsilon H, \varepsilon), \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x}(v + \varepsilon H, \varepsilon)[f(v + \varepsilon H, z + h(v + \varepsilon H, \varepsilon), \varepsilon)$ $-f(v + \varepsilon H, h(v + \varepsilon H, \varepsilon), \varepsilon)]$.
Функции $h(x, \varepsilon)$, $H(v, z, \varepsilon)$ можно искать в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра ε.
Аналогично производится декомпозиция моделей сингулярно возмущенных систем, линейных по быстрой переменной.
В п. 1.2.2 производится расщепление модели управляемой двухтемповой системы следующего вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, \varepsilon) + B_1(x, \varepsilon) u, \\ \varepsilon \dot{y} &= g(x, y, \varepsilon) + B_2(x, \varepsilon) u. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $x \in X \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in Y \subset \mathbb{R}^{n_2}$ — медленная и быстрая переменные, $u \in U \subset \mathbb{R}^r$ — управляющие воздействия, ε — малый положительный параметр, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $t \in \mathbb{R}$, f, g — векторные функции, B_i, $i = 1, 2$ — матричные функции соответствующих размерностей.
Предполагается, что для этой модели выполняются условия 1)–3) п. 1.2.1 и функции B_i равномерно непрерывны и ограничены с достаточным числом частных производных по всем переменным при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $t \in \mathbb{R}$. Производится замена переменных (4) и полагается, что функция H линейна по z, т. е. $H(v, z, \varepsilon) = H_a(v, \varepsilon) z$. В результате получена модель следующего вида

$$\begin{aligned} \dot{v} &= F(v, \varepsilon) + \widetilde{B_1}(v, \varepsilon H, \varepsilon) u, \\ \varepsilon \dot{z} &= Z(v, \varepsilon H, z, \varepsilon) + \widetilde{B_2}(v, \varepsilon H, \varepsilon) u,\ Z(v, \varepsilon H, 0, \varepsilon) \equiv 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $\widetilde{B_2}(v,\varepsilon H,\varepsilon) = B_2(v{+}\varepsilon H,\varepsilon){-}\varepsilon\frac{\partial h}{\partial x}(v{+}\varepsilon H,\varepsilon)B_1(v{+}\varepsilon H,\varepsilon),\ \widetilde{B_1}(v,\varepsilon H,z,\varepsilon)$ $= B_1(v{+}\varepsilon H,\varepsilon){-}\frac{\partial H}{\partial z}\widetilde{B_2}(v,\varepsilon H,\varepsilon)$, функции $F(v,\varepsilon),\ Z(v,\varepsilon H,z,\varepsilon)$ определены выше.
При $\varepsilon = 0:\ \widetilde{B_{20}}(v) = \widetilde{B_2}(v,0,0) = B_2(v,0) = B_{20}(v),\ \widetilde{B_{10}}(v) = \widetilde{B_1}(v,0,0)$ $= B_1(v,0) - \frac{\partial H}{\partial z}(v,z,0)\widetilde{B_2}(v,0,0) = B_{10}(v) - H_a(v,0)B_{20}(v)$.
Далее рассматривается система (7) с начальными условиями $v(0) = 0$, $z(0) = 0$, для которой справедливы тождества $Z(v,0,0,\varepsilon) \equiv 0,\ Z(0,0,0,\varepsilon)$ $\equiv 0$. Линейная модель для системы (7) в окрестности начала координат имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{v} &= A_1 v + \bar{B}_1 u,\ v(0) = 0, \\ \varepsilon\dot{z} &= A_2 z + \bar{B}_2 u,\ z(0) = 0, \end{aligned}$$

где $A_1 = \frac{\partial F}{\partial v}(0,\varepsilon),\ A_2 = \frac{\partial Z}{\partial z}(0,0,0,\varepsilon),\ \bar{B}_1 = \widetilde{B_1}(0,0,\varepsilon),\ \bar{B}_2 = \widetilde{B_2}(0,0,\varepsilon)$.
Имеет место следующее утверждение.
Теорема 5. Рассмотрим модель (7) управляемого процесса в $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ с ограничивающим множеством $U \subset \mathbb{R}^r$, содержащим внутри себя точку $u = 0$. Предположим, что: 1) $F(0,\varepsilon) = 0$; 2) rank $\left(\bar{B}_1, A_1\bar{B}_1, \ldots, A_1^{n_1-1}\bar{B}_1\right) = n_1$; 3) rank $\left(\bar{B}_2, A_2\bar{B}_2, \ldots, A_2^{n_2-1}\bar{B}_2\right) = n_2$. Тогда существует такое $\varepsilon^* > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon^*],\ \varepsilon^* \leqslant \varepsilon_0$, область нуль-управляемости открыта в $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ (т.е. система (7) локально управляема вблизи нуля).
В п. 1.2.4 получены достаточные условия наблюдаемости нелинейных двухтемповых систем.
В п. 1.2.5 решается задача стабилизируемости системы, описываемой сингулярно возмущенным дифференциальным уравнением второго порядка.
В третьем параграфе получены достаточные условия локальной управляемости и локальной наблюдаемости вблизи нуля для однозвенного манипулятора с упругим сочленением, проведено численное моделирование движения данного манипулятора.

Глава 2 содержит математический аппарат исследования многотемповых систем. Полученные результаты используются при изучении свойств следующих динамических систем: энергосистемы из двух разнотипных электростанций, технологического комплекса, гироскопического стабилизатора. **В первом параграфе** рассматриваются модели линейных многотемповых систем вида

$$\prod_{k=0}^{i}\varepsilon_k\dot{x}_i = \sum_{j=0}^{n} A_{ij}x_j + B_i u,\ i = \overline{0,n}, \tag{8}$$

где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ — переменные состояния, соответствующие различным темпам движений, x_0 — самая медленная переменная, x_n — самая быстрая переменная, $u \in \mathbb{R}^r$ — управляющие воздействия, $A_{ij},\ B_i$ — матрицы соответствующих размерностей, причем $A_{ij} = A_{ij}(t,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n),\ B_i =$

$B_i(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$; $i, j = \overline{0, n}$ — матричные функции, ε_l, $l = \overline{1, n}$ — малые положительные параметры, $\varepsilon_l \in (0, \varepsilon_l^0]$, $\varepsilon_0 = 1$, $t \in \mathbb{R}$, точка означает дифференцирование по t.
Предполагается, что матричные функции A_{ij}, $(A_{nn}(t, 0, \ldots, 0))^{-1}$, B_i обладают достаточным числом непрерывных и ограниченных частных производных по всем аргументам при $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i \in [0, \varepsilon_i^0]$ и собственные значения $\lambda_j = \lambda_j(t)$, $j = \overline{1, n_n}$ матрицы $A_{nn}(t, 0, \ldots, 0)$ удовлетворяют неравенству $\mathrm{Re}\ \lambda_j \leqslant -2\beta_1 < 0$.
При помощи n-линейных невырожденных преобразований система (8) приведена к блочно-диагональному виду:

$$\prod_{k=0}^{i} \varepsilon_k \dot{z}_i \ = \ A_i z_i + \bar{B}_i u, \ i = \overline{0, n}$$

Сформулированы и доказаны следующие утверждения.
Теорема 6. Если медленная и n-быстрых подсистем блочно-диагональной системы управляемы на отрезке $[t_0, t_1]$, то существуют такие $\varepsilon_i^* > 0$, что исходная система (8) управляема при всех $\varepsilon_i \in (0, \varepsilon_i^*]$, $\varepsilon_i^* \leqslant \varepsilon_i^0$ на отрезке времени $[t_0, t_1]$.
Предполагается, что матрицы–коэффициенты блочно-диагональной системы непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $t^* \in [t_0, t_1]$ до $(n_i - 1)$-ого порядка включительно, $i = \overline{0, n}$.
Пусть для самой медленной подсистемы определены матрицы:
$K_{10} = \bar{B}_0^{(0,0,\ldots,0)}$, $K_{20} = A_0^{(0,0,\ldots,0)} \bar{B}_0^{(0,0,\ldots,0)} - \frac{d\bar{B}_0^{(0,0,\ldots,0)}}{dt}, \ldots, K_{n_0,0} = A_0^{(0,0,\ldots,0)} K_{n_0-1,0}$ $-\frac{dK_{n_0-1,0}}{dt}$.
Теорема 7. Если в некоторой точке $t^* \in [t_0, t_1]$ выполняются следующие условия: 1) $\mathrm{rank}\ (K_{10}, K_{20}, \ldots, K_{n_0,0}) = n_0$;
2) $\mathrm{rank}\ \left(\bar{B}_i^{(0,0,\ldots,0)}, A_i^{(0,0,\ldots,0)} \bar{B}_i^{(0,0,\ldots,0)}, \ldots, (A_i^{(0,0,\ldots,0)})^{n_i-1} \bar{B}_i^{(0,0,\ldots,0)}\right) = n_i$, $i = \overline{1, n}$;
то существуют такие $\varepsilon_i^* > 0$, что при всех $\varepsilon_i \in (0, \varepsilon_i^*]$, $\varepsilon_i^* \leqslant \varepsilon_i^0$ система (8) управляема на отрезке $[t_0, t_1]$.
Далее вводится определение системы k-ого приближения для блочно-диагональной системы и сформулирована и доказана следующая теорема.
Теорема 8. Пусть в некоторой фиксированной точке $t^* \in [t_0, t_1]$ существуют миноры n_i-ого порядка $M_{n_i}^{(l_1, l_2, \ldots, l_n)} \neq 0$ матриц управляемости медленной и n-быстрых подсистем системы k-ого приближения для блочно-диагональной системы, представимые в виде

$$M_{n_i}^{(l_1, l_2, \ldots, l_n)} = \sum_{A} \prod_{j=1}^{n} \varepsilon_j^{l_j} M_i^{(l_1, l_2, \ldots, l_n)} + \varepsilon_1^{k+1} M_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n), \ M_i^{(l_1, l_2, \ldots, l_n)} \in \mathbb{R},$$

$M_i^{(l_1, l_2, \ldots, l_n)} \neq 0$, $M_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ — скалярная непрерывная по всем аргументам функция, $i = \overline{0, n}$. Тогда существуют такие $\varepsilon_p^* > 0$, что система (8) управляема на отрезке времени $[t_0, t_1]$ при всех $\varepsilon_p \in (0, \varepsilon_p^*],\ \varepsilon_p^* \leqslant \varepsilon_p^0,\ p = \overline{1, n}$.

Пусть фундаментальная матрица однородной системы для блочно-диагональной системы — диагональная матрица, главные блоки которой $V_0(t, t_0), V_1(t, t_0, \varepsilon_1), \ldots, V_n(t, t_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — фундаментальные матрицы соответствующих однородных систем: $\dot{z}_0 = A_0^{(0,0,\ldots,0)} z_0,\ \varepsilon_1 \dot{z}_1 = (A_1^{(0,0,\ldots,0)} + \varepsilon_1 \times A_1^{(1,0,\ldots,0)}) z_1$, и т. д., $\prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k \dot{z}_n = (A_n^{(0,0,\ldots,0)} + \varepsilon_1 A_n^{(1,0,\ldots,0)} + \varepsilon_2 A_n^{(0,1,\ldots,0)} + \cdots + \varepsilon_n A_n^{(0,0,\ldots,1)}) z_n$. При $t = t_0:\ V_0(t_0, t_0) = I,\ V_1(t_0, t_0, \varepsilon_1) = I, \ldots, V_n(t_0, t_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = I$. Симметрическая матрица $W(t_0, t_1)$ имеет вид

$$W(t_0, t_1) = \begin{pmatrix} \Phi_{00} & \Phi_{01}(\varepsilon_1) & \ldots & \Phi_{0n}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \\ \Phi_{10}(\varepsilon_1) & \frac{1}{\varepsilon_1}\Phi_{11}(\varepsilon_1) & \ldots & \frac{1}{\varepsilon_1}\Phi_{1n}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n0}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) & \frac{1}{\varepsilon_1}\Phi_{n1}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) & \ldots & \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\varepsilon_k}\Phi_{nn}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

Теорема 9. Если главные блоки $\Phi_{00},\ \Phi_{11}(0), \ldots, \Phi_{nn}(0, 0, \ldots, 0)$ матрицы W положительно определены, то существуют такие $\varepsilon_i^* > 0$, что система (8) является управляемой на отрезке $[t_0, t_1]$ при всех $\varepsilon_i \in (0, \varepsilon_i^*],\ \varepsilon_i^* \leqslant \varepsilon_i^0$.

Во втором параграфе рассматриваются нелинейные многотемповые модели вида

$$\prod_{k=0}^{i} \varepsilon_k \dot{x}_i \ = \ f_i(x_0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) + B_i(x_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) u,\ i = \overline{0, n}, \quad (9)$$

где $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ — переменные состояния, соответствующие различным темпам движения, $u \in U \subset \mathbb{R}^r$ — управляющие воздействия, f_i — векторные функции, $B_i,\ i = \overline{0, n}$ — матричные функции соответствующих размерностей, равномерно непрерывные и ограниченные с достаточным числом частных производных по всем переменным при $t \in \mathbb{R},\ \varepsilon_l \in (0, \varepsilon_l^0]$, $l = \overline{1, n}, \varepsilon_0 = 1$.

Предполагается, что для системы (9) выполняются следующие условия:

1) Уравнение $f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) = 0$ имеет изолированное решение $x_n = h_n^{(0,0,\ldots,0)}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$.

2) В области

$$\Omega = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) : \|x_n - h_n^{(0,0,\ldots,0)}(x_0, \ldots, x_{n-1})\| \leq \rho_n,$$

$$\varepsilon_l \in (0, \varepsilon_l^0], l = \overline{1, n}\}$$

функции $h_n^{(0,0,\ldots,0)},\ f_i,\ i = \overline{0, n}$ равномерно непрерывны и ограничены с достаточным числом частных производных по всем переменным.

3) Собственные значения $\lambda_i = \lambda_i(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}), i = \overline{1, n_n}$ матрицы

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, h_n^{(0,0,\ldots,0)}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}), 0, \ldots, 0)$$

удовлетворяют неравенству $\mathrm{Re}\ \lambda_i \le -2\beta_1 < 0$.
1^1) Уравнение

$$f_{n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, h_n^{(0,0,\ldots,0)}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}), 0, \ldots, 0) = 0$$

имеет изолированное решение $x_{n-1} = h_{n-1}^{(0,0,\ldots,0)}(x_0, \ldots, x_{n-2})$.
2^1) В области

$$\Omega_1 = \{(x_0, \ldots, x_{n-2}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) : \|x_{n-1} - h_{n-1}^{(0,0,\ldots,0)}(x_0, \ldots, x_{n-2})\| \le \rho_{n-1},$$

$$\varepsilon_l \in (0, \varepsilon_l^1],\ \varepsilon_l^1 \le \varepsilon_l^0,\ l = \overline{1, n}\}$$

функции $h_{n-1}^{(0,0,\ldots,0)}$, f_i, $i = \overline{0, n-1}$ равномерно непрерывны и ограничены с достаточным числом частных производных по всем переменным.
3^1) Собственные значения $\lambda_i = \lambda_i(x_0, \ldots, x_{n-2}), i = \overline{1, n_{n-1}}$ матрицы

$$\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}(x_0, \ldots, x_{n-2}, h_{n-1}^{(0,0,\ldots,0)}, h_n^{(0,0,\ldots,0)}), 0, \ldots, 0)$$

удовлетворяют неравенству $\mathrm{Re}\ \lambda_i \le -2\beta_2 < 0$.
Здесь $h_{n-1}^{(0,0,\ldots,0)} = h_{n-1}^{(0,0,\ldots,0)}(x_0, \ldots, x_{n-2})$, $h_n^{(0,0,\ldots,0)} = h_n^{(0,0,\ldots,0)}(x_0, \ldots, x_{n-2},$ $h_{n-1}^{(0,0,\ldots,0)})$.
...
1^{n-1}) Уравнение

$$f_1(x_0, x_1, h_2^{(0,0,\ldots,0)}, \ldots, h_n^{(0,0,\ldots,0)}(x_0, x_1, h_2^{(0,0,\ldots,0)}, \ldots, h_{n-1}^{(0,0,\ldots,0)}), 0, \ldots, 0) = 0$$

имеет изолированное решение $x_1 = h_1^{(0,0,\ldots,0)}(x_0)$.
2^{n-1}) В области

$$\Omega_{n-1} = \{(x_0, x_1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) : \|x_1 - h_1^{(0,0,\ldots,0)}(x_0)\| \le \rho_1, \varepsilon_l \in (0, \varepsilon_l^{n-1}], l = \overline{1, n},$$

$$\varepsilon_l^{n-1} \le \varepsilon_l^{n-2} \le \ldots \le \varepsilon_l^0\},$$

функции h_j, $j = \overline{2, n}$, $f_i, i = 0, 1$, $h_1^{(0,0,\ldots,0)}$ равномерно непрерывны и ограничены с достаточным числом частных производных по всем переменным.
3^{n-1}) Собственные значения $\lambda_i = \lambda_i(x_0), i = \overline{1, n_1}$ матрицы

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0, h_1^{(0,\ldots,0)}, h_2^{(0,\ldots,0)}, \ldots, h_n^{(0,\ldots,0)}, 0, \ldots, 0)$$

удовлетворяют неравенству $\mathrm{Re}\ \lambda_i \le -2\beta_n < 0$. Здесь $h_1^{(0,\ldots,0)} = h_1^{(0,\ldots,0)}(x_0)$, $h_2^{(0,\ldots,0)} = h_2^{(0,\ldots,0)}(x_0, h_1^{(0,\ldots,0)}), \ldots, h_n^{(0,\ldots,0)} = h_n^{(0,\ldots,0)}(x_0, h_1^{(0,\ldots,0)}, \ldots, h_{n-1}^{(0,\ldots,0)})$.

Далее в системе (9) производится гладкая замена переменных

$$\begin{aligned} x_0 &= v_0 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{j} \varepsilon_k H_0^j, \\ x_i &= v_i + h_i + \sum_{j=i+1}^{n} \prod_{k=i+1}^{j} \varepsilon_k H_i^j, \ i = \overline{1, n-1}, \\ x_n &= v_n + h_n, \end{aligned}$$

где $h_n = h_n(x_0, \ldots, x_{n-1}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$; $H_0^1 = H_0^1(v_0, v_1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$; $h_1 = h_1(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$; $H_i^2 = H_i^2(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1, v_1 + h_1, v_2, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $i = 0, 1$; $h_2 = h_2(v_0 + \varepsilon_1 H_0^1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 H_0^2, v_1 + h_1 + \varepsilon_2 H_1^2, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$;

$$H_i^j = H_i^j(v_0 + \sum_{l=1}^{j-1} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{l=2}^{j-1} \prod_{k=2}^{l} \varepsilon_k H_1^l, \ldots, v_{j-1} + h_{j-1}, v_j, \varepsilon_1, \ldots,$$
$$\varepsilon_n), \ j = \overline{3, n}, \ i = \overline{0, j-1};$$

$$h_i = h_i(v_0 + \sum_{l=1}^{i} \prod_{k=1}^{l} \varepsilon_k H_0^l, v_1 + h_1 + \sum_{i=2}^{i} \prod_{k=2}^{l} \varepsilon_k H_1^l, \ldots, v_{i-1} + h_{i-1} + \varepsilon_i H_{i-1}^i, \varepsilon_1,$$
$$\ldots, \varepsilon_n), \ i = \overline{3, n-1}.$$

В результате такой замены получена модель следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{v_0} &= F_0(v_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) + \widetilde{B_0}(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \ldots, \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k H_0^n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) u, \\ \varepsilon_1 \dot{v_1} &= F_1(v_0, v_1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) + \widetilde{B_1}(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \ldots, \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k H_0^n, v_1, \varepsilon_1, \\ &\quad \ldots, \varepsilon_n) u, \\ \prod_{k=1}^{i} \varepsilon_k \dot{v_i} &= F_i(v_0, v_1, \ldots, v_i, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) + \widetilde{B}_i(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \ldots, \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k H_0^n, \\ &\quad v_1, \ldots, v_i, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) u, \ i = \overline{2, n-1}, \end{aligned} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k \dot{v_n} &= F_n(v_0, v_1, \ldots, v_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) + \widetilde{B_n}(v_0, \varepsilon_1 H_0^1, \ldots, \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k H_0^n, \\ &\quad \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) u. \end{aligned}$$

В п. 2.2.3 исследуется управляемость вблизи начала координат системы (10), при условии, что $F_0(0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = 0$, $F_l(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{l+1}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \equiv 0$,

$l=\overline{1,n}$. Линейная модель системы (10) в окрестности начала координат имеет вид

$$\prod_{k=0}^{n}\varepsilon_k\dot v_i = A_i v_i + \bar B_i u,\ v_i(0)=0,\ i=\overline{0,n},$$

где $A_i=\frac{\partial F_i}{\partial v_i}(0,\dots,0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n),\ \bar B_i=\widetilde B_i(0,\dots,0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$.
Для системы (10) справедлива следующая теорема.
Теорема 10. Рассмотрим модель (10) управляемого процесса в $\mathbb{R}^{n_0+n_1+\cdots+n_n}$ с ограничивающим множеством $U\subset\mathbb{R}^r$, содержащим внутри себя точку $u=0$. Предположим, что 1) $F_0(0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=0$;
2) $\operatorname{rank}\left(\bar B_i, A_i\bar B_i,\dots,A_i^{n_i-1}\bar B_i\right) = n_i,\ i=\overline{0,n}$. Тогда существуют такие $\varepsilon_p^*>0$, что при всех $\varepsilon_p\in(0,\varepsilon_p^*],\ \varepsilon_p^*\leqslant\varepsilon_p^0,\ p=\overline{1,n}$, область нуль-управляемости открыта в $\mathbb{R}^{n_0+n_1+\cdots+n_n}$ (т. е. система (10) локально управляема в окрестности начала координат).

В третьем параграфе получены достаточные условия устойчивости энергетической системы из двух разнотипных электростанций; достаточные условия управляемости слабоуправляемых систем, описываемых системой дифференциальных уравнений второго порядка; достаточные условия управляемости непрерывным технологическим комплексом; достаточные условия стабилизируемости силового гироскопического стабилизатора.

В заключении перечислены основные результаты и выводы диссертации.

В приложении А приведены основные понятия, термины и теоремы теории автоматического управления и теории сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений, использованные в данной диссертационной работе. **В приложении В** изучены такие свойства как управляемость, наблюдаемость, устойчивость и стабилизируемость трехтемповых систем. **В приложении С** исследуется управляемость некоторых линейных блочно-диагональных многотемповых систем.

Основные результаты:

1. Произведена декомпозиция моделей многотемповых управляемых систем.
2. Получены достаточные условия управляемости и наблюдаемости сингулярно возмущенных управляемых систем.
3. Рассмотрен случай, когда наличие свойств управляемости и наблюдаемости многотемповой системы определяется наличием этих свойств у системы k-ого приближения данной системы.
4. Проведено исследование на наличие свойств управляемости, наблюдаемости, устойчивости и стабилизируемости ряда технических систем: энергосистемы из двух электростанций, однозвенного манипулятора, силового гиростабилизатора, непрерывного технологического комплекса.
5. Проведено численное моделирование движения однозвенного манипуля-

тора с гибким сочленением.

Список публикаций по теме диссертации.

1. Семенова М. М. Управляемость линейных сингулярно возмущенных систем / М. М. Семенова// Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках. Тезисы докладов Воронежского зимнего симпозиума, Воронеж, 20–27 янв., 2000.— Воронеж, Воронежский государственный университет (ВГУ), 2000.— С. 202.

2. Семенова М. М. Декомпозиция и управляемость линейных сингулярно возмущенных систем/ М. М. Семенова // Тезисы докладов VII Международной конференции "Математика. Компьютер. Образование Дубна, 23–30 янв., 2000.— Москва, Московский государственный унивеситет (МГУ), 2000.— С. 290.

3. Семенова М. М. Управляемость многотемповых систем/ М. М. Семенова // Нелинейное моделирование и управление: Материалы Международного семинара, Самара, 26–30 июня, 2000.— Самара, 2000.— С. 105–106.

4. Семенова М. М. Управляемость нелинейных сингулярно возмущенных систем / М. М. Семенова// Обозрение прикладной и промышленной математики, 2000, т. 7, вып. 2.— Москва. Научное изд-во: Теория вероятностей и ее применение (ТВП), 2000.— С. 413–414.

5. Семенова М. М. Декомпозиция задачи управляемости линейных многотемповых систем/ М. М. Семенова// Вестник учетно-экономического факультета.— 2000.— Вып. 2.— Самара: Изд-во Самарской государственной экономической академии, 2000.— С. 208–216.

6. Семенова М. М. Многомерная модель управления непрерывным технологическим комплексом/ М. М. Семенова// Вестник Самарской государственной экономической академии.— 2000.— No. $2-3_{(3-4)}$.— Самара: Изд-во Самарской государственной экономической академии, 2000.— С. 303–305.

7. Семенова М. М. Понижение порядка системы в одной модели управления/ М. М. Семенова// Обозрение прикладной и промышленной математики.— 2001.— Т. 8, вып. 2.— Москва. Научное изд-во: Теория вероятностей и ее применение (ТВП), 2001.— С. 682.

8. Семенова М. М. Управляемость нелинейных многотемповых систем/ М. М. Семенова// Тезисы докладов VII Международного семинара "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления Москва, ИПУ РАН, 22–24 мая, 2002.— Москва, ИПУ РАН, 2002.— С. 175–176.

9. Семенова М. М. Декомпозиция многотемповых моделей управляемых систем/ М. М. Семенова// Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия.— 2002.— No. 4(26).— Самара: изд-во "Самарский университет".— С. 13–22.

10. Семенова М. М. Декомпозиция задач управляемости и наблюдаемости для гибких роботов/ М. М. Семенова// Вестник Самарского государствен-

ного технического университета. Серия "Математическая". Дифференциальные уравнения и их приложения.— 2003.— Вып. 22.— Самара, Самарский государственный технический университет.— С. 212–217.
11. Семенова М. М. Декомпозиция задач устойчивости линейных многотемповых систем/ М. М. Семенова// Математическое моделирование и краевые задачи. Труды Всероссийской научной конференции, Самара, 26–28 мая, 2004, часть 3.— Самара, Самарский государственный технический университет, 2004.— С. 192–194.
12. Семенова М. М. Управляемость и наблюдаемость манипуляторов/ М. М. Семенова// Тезисы докладов VIII Международного семинара "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления Москва, ИПУ РАН, 2–4 июня, 2004.— Москва, ИПУ РАН, 2004.— С. 165–166.
13. Семенова М. М. Декомпозиция многотемповых моделей линейных систем/ М. М. Семенова// Нелинейное моделирование и управление: тезисы доклада международного семинара, Самара, 22–25 июня, 2004.— Самара, 2004.— С. 47–48.
14. Семенова М. М. Управляемость и наблюдаемость манипуляторов с упругим сочленением/ М. М. Семенова// Сибирский журнал индустриальной математики.— 2004.— Т. VII, No. 1(17).— Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 2004.— С. 109–113.
15. Семенова М. М. Декомпозиция систем с несколькими временными масштабами/ М. М. Семенова// Мехатроника, автоматизация, управление.— 2004.— No. 8.— М.: Изд-во "Новые технологии 2004.— С. 6–11.